ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NIVEAUX (ET FONCTIONS ASSOCIEES)

H est une constante réelle donnée strictement positive

U est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}$ par les conditions

$|x| > 1 \Rightarrow U(x) = H \qquad |x| \leq 1 \Rightarrow U(x) = 0$

DEFINITION : On appelle NIVEAU tout nombre réel λ tel qu'il existe une fonction y, à valeurs réelles, dérivable d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $y'' - Uy = \lambda y$ et la condition : "l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ existe et égale 1".

REMARQUE 1 : La dernière des conditions citées équivaut à l'ensemble des conditions suivantes : $\int_{-\infty}^{-1} y^2(x)\,dx$ existe | $\int_{-1}^{+1} y^2(x)\,dx$ existe | $\int_{1}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ existe (la deuxième est d'ailleurs vérifiée d'emblée) et ces trois intégrales ont pour somme 1.

REMARQUE 2 ; Dès qu'il existe une fonction y telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ soit un nombre fini non nul (donc strictement positif), il suffit de multiplier cette fonction par un scalaire réel convenable (qui existe toujours) pour vérifier l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx = 1$.
Il n'est pas nécessaire de déterminer ce scalaire pour affirmer que λ est un niveau.
On peut le faire dès que l'on a la certitude que ($\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ existe) et que la fonction y n'est pas identiquement nulle.

QUESTIONS PRELIMINAIRES

Dans cette partie préliminaire :

a, b sont des constantes réelles

ω est une constante réelle strictement positive

1) Pour $t > 1$ calculer $\int_1^t (a\,e^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx$

APPLICATION : trouver la condition d'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx$

2) Pour $t > 1$, calculer $\int_1^t (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx$

APPLICATION : trouver la condition d'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx$

3) Trouver

a) la condition d'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})^2\,dx$

b) la condition d'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} (a\cos\omega x + b\sin\omega x)^2\,dx$

I.- RECHERCHE DES NIVEAUX POSITIFS (EVENTUELS)

QUESTION : Existe-t-il des niveaux λ positifs ? Dans l'affirmative combien et lesquels ?

PLAN CONSEILLE : Poser $\alpha = \sqrt{\lambda}$ (> 0) $\beta = \sqrt{H + \lambda}$ (ainsi $\beta > \alpha > 0$).

calculer y(x) pour $x < -1$, pour $x \in]-1, +1[$, pour $x > 1$ en fonction de x et de constantes, traduire l'existence des intégrales $\int_{-\infty}^{-1} y^2(x)\,dx$, $\int_{-1}^{+\infty} y^2(x)\,dx$ (ce qui peut conduire à diminuer le nombre des constantes).

Traduire la condition de continuité de la fonction y en -1 et 1.

et la condition de continuité de la fonction y' en -1 et 1.

Chercher si l'ensemble de ces conditions est compatible avec la suivante :

"la fonction y n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ ".

II.- 0 EST-IL UN NIVEAU ?

Répondre aux mêmes questions que dans la partie I lorsque $\lambda = 0$.

On pourra utiliser $\beta = \sqrt{H}$ (>0). On justifiera complètement (et soigneusement) la conclusion quelle qu'elle soit.

III.- (-H) EST-IL UN NIVEAU ?

Remplacer dans l'équation λ par -H, poser $\alpha = \sqrt{-\lambda} = \sqrt{H}$ (>0) et chercher une fonction associée y. On concluera et on justifiera complètement (et soigneusement) cette conclusion quelle qu'elle soit.

Tournez la page S. V. P.

page 122 1986 E.N.S.I. de chimie (Groupe Nord. Mathématiques)

IV.- RECHERCHE DES NIVEAUX $<-H$

Soit $\lambda < -H$. Répondre aux mêmes questions que dans la partie I. On pourra poser $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ $\beta = \sqrt{-H-\lambda}$. Ainsi $\alpha > \beta > 0$. On concluera et on justifiera la conclusion quelle qu'elle soit.

V.- ETUDE DES NIVEAUX $\in]-H, 0[$

Dans cette partie $-H < \lambda < 0$. On pose $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ (>0) $\beta = \sqrt{H+\lambda}$ (>0).

1) Calculer $y(x)$ en fonction de x, α, β, et d'autres constantes.
   a) pour $x < -1$ b) pour $-1 < x < 1$ c) pour $x > 1$
2) Traduire la continuité de y et de y' en -1 et $+1$. Calculer les constantes introduites dans 1°,a) et 1°,c) en fonction de α, β, et des constantes introduites dans 1°,b).
   Ces dernières peuvent-elles être simultanément nulles ?
3) Dans le cas envisagé où $\lambda \in]-H, 0[$ un niveau λ est dit de première catégorie si $\cos\alpha \sin\alpha > 0$. Soit λ un niveau de première catégorie et soit y une fonction associée.
   a) calculer β en fonction de α.
   b) trouver l'équation que doit vérifier α et démontrer que ce nombre α doit appartenir à un ensemble E, réunion d'un infinité d'intervalles ouverts J_k que l'on définira et que l'on numérotera à partir de 0.
   c) démontrer que les valeurs convenables de α sont les abscisses des points communs à une ligne L et à la réunion de deux droites Δ_1 , Δ_2. Trouver les équations de L (complétée par $x \in E$), Δ_1 , Δ_2 et les tracer sur un même graphique.
4) Un niveau λ est dit de deuxième catégorie si $\lambda \in]-H, 0[$ et si $\cos\alpha \sin\alpha \leq 0$.
   a) préciser si $\cos\alpha \sin\alpha$ peut être nul et calculer β en fonction de α.
   b) trouver l'équation que doit vérifier α et démontrer que ce nombre α doit appartenir à un ensemble F réunion d'une infinité d'intervalles ouverts J_k que l'on définira et que l'on numérotera à partir de 0.

   c) Démontrer que les nombres convenables sont les abcisses des points de $L' \cap (\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Tracer sur un même graphique les lignes L' (ne pas oublier $x \in F$) Δ_1 , Δ_2.

VI.- NOMBRE TOTAL DES NIVEAUX (EN FONCTION DE L'ENTIER n DEFINI PAR $n < \frac{2\sqrt{H}}{\pi} \leq n+1$

1) Dans cette question n est pair. On pose $n = 2p$ $(p \in \mathbb{N})$
   a) trouver le nombre des niveaux λ $(\in]-H, 0[)$ de première catégorie
   b) trouver le nombre des niveaux λ $(\in]-H, 0[)$ de deuxième catégorie
   c) trouver le nombre total des niveaux λ répartis (éventuellement) dans toutes les catégories.
2) Dans cette question n est impair. On pose $n = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$
   a) trouver le nombre des niveaux λ $(\in]-H, 0[)$ de première catégorie
   b) trouver le nombre des niveaux λ $(\in]-H, 0[)$ de deuxième catégorie
   c) trouver le nombre total des niveaux λ répartis (éventuellement) dans toutes les catégories.
3) Dans cette question n $(\in \mathbb{N})$ est quelconque. Trouver, en fonction de n le nombre total des niveaux.

VII.- ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : on pose $H = \frac{\pi^2}{8}$

1) Trouver le nombre total des niveaux et calculer chacun d'eux

2) Pour chacun des niveaux, déterminer la fonction y associée. On imposera (pour garantir l'unicité) $y(1) \geq 0$ et on calculera $y(x)$ dans chacun des cas suivants :

   $x < -1$ $-1 < x < 1$ $x > 1$

E.N.S.I. de Chimie
Groupe Nord. Mathématiques
1986
page 123